

# Instabilités de Rayleigh-Bénard dans les cellules de Hele-Shaw

M. SOUHAR, J. P. BRANCHER et S. ANISS

Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée, CNRS, UA 875, 2, Avenue de la Forêt de Haye, B.P. 160, 54504 Vandoeuvre les Nancy Cedex, France

(Reçu le 8 Décembre 1990 et sous forme finale le 25 Avril 1991)

**Résumé**—Dans ce travail, on effectue une étude théorique et expérimentale sur le déclenchement du mouvement de convection d'un fluide dans une cellule de Hele-Shaw. Il s'avère que le nombre de Rayleigh critique  $Ra_c^* = 48\pi^2$  trouvé précédemment par d'autres auteurs n'est en fait valable que pour une couche de fluide à surfaces horizontales libres ce qui n'est pas le cas des cellules de Hele-Shaw. Dans le cas des surfaces horizontales rigides, notre approche théorique conduit à un nombre de Rayleigh critique de 825.6. Ce nombre est plus proche des résultats expérimentaux que celui connu auparavant. Un moyen élégant de visualisation des cellules a été mis en oeuvre pour ce genre de situation, permettant d'estimer le nombre de Rayleigh critique expérimental.

## 1. INTRODUCTION

DE NOMBREUX travaux [1, 2] théoriques et expérimentaux ont été menés ces dernières années en convection de Rayleigh-Bénard. Davis [3] a développé une théorie sur la stabilité linéaire dans le cas de fluides enfermés dans des cavités parallélépipédiques, horizontales à parois rigides et conductrices. Il a défini les rouleaux finis (Finite Rolls) comme des cellules d'un mouvement convectif à deux composantes de vitesse non nulles, dépendant des trois variables spatiales. Il a ensuite fait apparaître la dépendance du nombre de Rayleigh critique,  $Ra_c$ , en fonction des deux rapports d'aspect : transversal  $\varepsilon/l$  et longitudinal  $l/L$  (Fig. 1). En particulier, il a montré que le nombre  $Ra_c$  tend rapidement vers la valeur 1708 quand les parois latérales sont rejetées vers l'infini. Pour la même configuration, Stork et Müller [4] ont effectué des travaux expérimentaux confirmant les résultats théoriques de Davis. En particulier, ils ont remarqué que les 'rouleaux finis' apparaissent dans la plupart des cas paral-

lèlement aux faces les plus proches de la boîte rectangulaire. Davies-Jones [5] ont montré qu'excepté le cas où le rapport d'aspect transversal tend vers l'infini, les rouleaux finis ne sont pas la solution exacte du problème de convection de Rayleigh-Bénard linéarisé : les parois latérales (conductrices ou isolantes) imposent un mouvement convectif tridimensionnel. Il a développé ensuite un modèle analytique pour un canal rectangulaire infini, à surfaces horizontales libres, où des solutions tridimensionnelles complètes peuvent être construites. Luijckx et Platten [6] ont montré indirectement ce caractère tridimensionnel de l'écoulement en mesurant expérimentalement la longueur d'onde en fonction du rapport d'aspect transversal, puis en comparant ces résultats à ceux obtenus théoriquement dans le cas d'un écoulement bidimensionnel ou tridimensionnel. Davis [3] et Catton [7], dans leur formulation du problème par la méthode de Galerkin ont construit des solutions tridimensionnelles par superposition des rouleaux finis dans les deux directions horizontales. Enfin récemment Chana et Daniels [8] ont appliqué la méthode de Galerkin au problème à deux dimensions. Cela a été suffisant pour décrire le mouvement tridimensionnel au voisinage des parois latérales et obtenir des résultats approchés pour les deux cas asymptotiques : le facteur d'aspect tendant vers zéro ou vers l'infini. Dans le cas où  $(\varepsilon/l)$  tend vers zéro, ils aboutissent à un nombre de Rayleigh critique  $Ra_c^* = 48\pi^2$ . Résultat déjà obtenu auparavant [1].

Dans le cadre de cette étude, on s'intéresse au cas où le rapport d'aspect transversal tend vers zéro. Cela correspond à ce qu'on appelle une cellule de Hele-Shaw, où on a une couche mince et verticale d'un fluide enfermé dans une cavité parallélépipédique, chauffée par le bas et refroidie par le haut. La cavité a une dimension horizontale  $\varepsilon$  très faible par rapport aux autres.

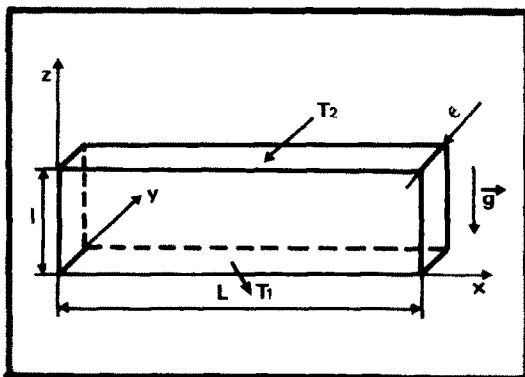


FIG. 1. Géométrie de la cellule.  $l/L \ll 1$ ,  $\varepsilon/l \ll 1$ .

## NOMENCLATURE

$a$	diffusivité thermique	$\Delta T$	écart de température caractéristique
$e$	épaisseur du tube du cuivre	$t, (t_0)$	temps (temps caractéristique)
$g$	accélération de la pesanteur	$\mathbf{V}(u, v, w); \mathbf{V}^*(u^*, v^*, w^*)$	champ de vitesse dimensionnel (adimensionnel)
$Gr$	nombre de Grashof, $\beta g(T_1 - T_2)l^3/\nu^2$	$V_0, (V'_0)$	vitesse caractéristique de $u$ et $v$ (de $w$ )
$h$	coefficient de transfert de chaleur	$x, y, z; (x^*, y^*, z^*)$	variables spatiales dimensionnelles (adimensionnelles).
$l, (L)$	distance entre les plaques chaude et froide (longueur de la cavité)		
$P, (p_0)$	pression caractéristique (pression à l'équilibre)		
$Pr$	nombre de Prandtl, $\nu/a$		
$p'$	perturbation infinitésimale de la pression	Symboles grecs	
$R$	résistance thermique	$\beta$	coefficient de dilatation à pression constante, $(-1/\rho_0)(\partial\rho/\partial T)_p$
$Ra$	nombre de Rayleigh, $Gr Pr$	$\varepsilon$	épaisseur de la cavité occupée par le fluide
$Ra^*$	nombre de Rayleigh de la cellule, $\varepsilon^{*2} Ra$	$\varepsilon^*$	rapport d'aspect (paramètre de perturbation)
$Ra_c^*$	nombre de Rayleigh critique de la cellule	$\lambda$	conductivité thermique, $\varepsilon/l$
$T_1, (T_2)$	température de la plaque chaude (froide)	$\mu(\nu)$	viscosité dynamique (viscosité cinématique)
$T_0$	température du fluide à l'équilibre	$\rho_0$	masse volumique
$T', (T^*)$	perturbation infinitésimale de la température vis à vis de sa valeur à l'équilibre (perturbation adimensionnelle)	$\Phi$	flux thermique
		$\omega$	nombre d'ondes.

En pratique, les cellules de Hele-Shaw (1898) permettent de réaliser une simulation des écoulements dans les milieux poreux [9]. En effet l'analogie hydraulique entre un écoulement dans une cellule de Hele-Shaw et celui dans un milieu poreux est rigoureuse lorsqu'on a un écoulement isotherme. Cette analogie est moins évidente quand il y a variation de température [10], compte tenu de la difficulté à modéliser l'interaction thermique à l'interface solide-liquide. A ce titre, et sans être exhaustif, on peut citer les travaux rapportés dans les références [11-15]. Notre étude consiste à déterminer analytiquement le critère d'apparition des instabilités quand les parois latérales sont parfaitement isolantes. Pour cela on utilise l'analyse adimensionnelle pour faire apparaître un paramètre de perturbation  $\varepsilon/l$ , moyennant un choix convenable des échelles; ensuite on cherche une première approximation possible par la méthode des développements asymptotiques, pour étudier la stabilité.

Cette étude théorique est confrontée à une étude expérimentale sur le déclenchement du mouvement convectif dans une cellule de Hele-Shaw, par la mise en oeuvre d'un nouveau moyen de visualisation des rouleaux convectifs, utilisable quand le fluide utilisé est de l'eau.

## 2. FORMULATION DU PROBLEME

On considère un fluide Newtonien, enfermé dans une cavité rectangulaire d'extension ( $x$ ) infinie Fig. 1 :  $0 \leq y \leq \varepsilon$ ;  $0 \leq z \leq l$ .  $x, y, z$  sont les coordonnées spatiales.  $l$  et  $\varepsilon$  sont respectivement la hauteur et

l'épaisseur de la cavité. Les deux faces horizontales inférieure et supérieure sont supposées rigides et maintenues respectivement aux températures constantes  $T_1$  et  $T_2$  ( $T_1 > T_2$ ). Les faces verticales latérales sont également supposées rigides, mais parfaitement isolantes. Les constantes  $\rho_0, a, \mu$  et  $\nu$  désigneront respectivement la masse volumique, la diffusivité thermique, les viscosités dynamique et cinématique du fluide; toutes sont déterminées quand le fluide est au repos. Le coefficient de dilatation  $\beta$  est déterminé en régime de transfert purement conductif.

## 2.1. Equations de bilan et linéarisation

Tant que le gradient de température imposé n'engendre pas de mouvement du fluide, on est en régime conductif. Si on note  $T_0, p_0, \rho_0$  la température, la pression et la masse volumique du fluide au repos, on a :

$$\mathbf{V} = \mathbf{0}, \quad -\nabla p_0 + \rho_0 \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad T_0 = T_1 - (T_1 - T_2) \left( \frac{z}{l} \right) \quad (1)$$

où  $\mathbf{V}$  est la vitesse de composantes  $u, v, w$  selon  $x, y$  et  $z$ .

Pour étudier la stabilité du système au repos, on perturbe son état d'équilibre en posant :

$$T = T_0 + T', \quad p = p_0 + p', \\ \mathbf{V} = \mathbf{0} + \mathbf{V}, \quad \text{avec} \quad \mathbf{V}(u, v, w, t). \quad (2)$$

Le mouvement de convection est régi alors par le

système d'équations des bilans de masse, de quantité de mouvement et d'énergie. En négligeant tous les termes du second ordre (termes de convection et dissipation) et en admettant que le fluide reste incompressible (approximation de Boussinesq), ces équations s'écrivent :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \mu \Delta u \quad (4a)$$

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial y} + \mu \Delta v \quad (4b)$$

$$\rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial z} + \mu \Delta w + \rho_0 \beta g T' \quad (4c)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} = \frac{T_1 - T_2}{l} w + a \Delta T' \quad (5)$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$u = v = w = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad \text{ou } z = 1 \quad (6a)$$

$$u = v = w = 0 \quad \text{en } y = 0 \quad \text{ou } y = \varepsilon \quad (6b)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial y} = 0 \quad \text{en } y = 0 \quad \text{ou } y = \varepsilon. \quad (6c)$$

Les conditions aux limites thermiques en  $z = 0$  et  $1$  peuvent être de deux types : soit température imposée, soit flux imposé. L'écriture de ces conditions permettra de déterminer les constantes d'intégration.

## 2.2. Analyse adimensionnelle—choix des échelles

La géométrie de la cavité nous impose les variables réduites suivantes :

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{l}, & y^* &= \frac{y}{\varepsilon}, & z^* &= \frac{z}{l} \quad \text{et posons } \varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{l} \\ u^* &= \frac{u}{V_0}, & v^* &= \frac{v}{V_0}, & w^* &= \frac{w}{V_0}, \\ t^* &= \frac{t}{t_0}, & p^* &= \frac{p}{P_0}, & T^* &= \frac{T}{\Delta T} \end{aligned} \quad (7)$$

où les grandeurs caractéristiques  $V_0$ ,  $V'_0$ ,  $P_0$ ,  $t_0$ ,  $\Delta T$  sont inconnues au départ. Avec ce choix, le système (3), (4), (5) et les conditions aux limites rendues adimensionnelles s'écrivent :

$$\varepsilon^* \frac{V_0}{V'_0} \left[ \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right] + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (8)$$

$$\varepsilon^{*2} \frac{l^2}{\nu t_0} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} = -P \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \varepsilon^{*2} \Delta_2 u^* + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad (9a)$$

$$\varepsilon^{*2} \frac{l^2}{\nu t_0} \frac{\partial v^*}{\partial t^*} = -P \frac{V_0}{V'_0} \frac{1}{\varepsilon^*} \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \varepsilon^{*2} \Delta_2 v^* + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \quad (9b)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{*2} \frac{l^2}{\nu t_0} \frac{\partial w^*}{\partial t^*} &= -P \frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \varepsilon^{*2} \Delta_2 w^* \\ &+ \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} + \frac{g \beta \Delta T \varepsilon^2}{\nu V_0} T^* \end{aligned} \quad (9c)$$

$$\varepsilon^{*2} \frac{l^2}{\nu t_0} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} = \frac{T_1 - T_2}{\Delta T} \frac{V_0 \varepsilon^2}{\nu l} w^* + \varepsilon^{*2} \Delta_2 T^* + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \quad (10)$$

avec les conditions :

$$u^* = v^* = w^* = 0 \quad \text{en } z^* = 0 \quad \text{ou } z^* = 1 \quad (11a)$$

$$u^* = v^* = w^* = 0 \quad \text{en } y^* = 0 \quad \text{ou } y^* = 1 \quad (11b)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial y^*} = 0 \quad \text{en } y^* = 0 \quad \text{ou } y^* = 1. \quad (11c)$$

$\Delta_2$  représente l'opérateur  $\partial^2/\partial x^{*2} + \partial^2/\partial z^{*2}$  et  $P = \varepsilon P_0/\rho_0 \nu l V_0$ .

**2.2.1. Hypothèses.** Les grandeurs caractéristiques sont choisies de telle sorte que les variables réduites soient de l'ordre de 1. D'après l'équation de continuité, on a :  $\varepsilon^*(V_0/V'_0) = 1$ . D'où  $V'_0 = \varepsilon^* V_0$ . Le terme de convection par gravité  $\varepsilon^2 g \beta \Delta T / \nu V_0$  est donné, on le choisira par hypothèse de l'ordre de 1, soit  $V_0 = \varepsilon^2 g \beta \Delta T / \nu$ . On se placera en régime stationnaire.

Avec ces hypothèses, on a le système adimensionnel suivant :

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0 \quad (12)$$

$$P \frac{\partial p^*}{\partial x^*} = \varepsilon^{*2} \Delta_2 u^* + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad (13a)$$

$$\frac{1}{\varepsilon^{*2}} P \frac{\partial p^*}{\partial y^*} = \varepsilon^{*2} \Delta_2 v^* + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \quad (13b)$$

$$P \frac{\partial p^*}{\partial z^*} = \varepsilon^{*2} \Delta_2 w^* + \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} + T^* \quad (13c)$$

$$\varepsilon^{*4} Ra w^* + \varepsilon^{*2} \Delta_2 T^* + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} = 0 \quad (14)$$

où  $Ra$  est le nombre de Rayleigh défini par :

$Ra = (\beta g (T_1 - T_2) l^3 / \nu^2) (\nu / a) = Gr Pr$ ;  $Gr$  est le nombre de Grashof et  $Pr$  le nombre de Prandtl.

**2.2.2. Discussion.** Le terme  $P$  peut être de l'ordre de 1, de l'ordre de  $\varepsilon^{*2}$ , très supérieur à 1 ou très inférieur à  $\varepsilon^{*2}$ . Examinons ces quatre cas :

1er cas :  $P \gg 1$ .

Les trois équations du mouvement se réduisent à :  $\nabla p^* = 0$ , c.à.d.  $p^* = cte$ . Cela correspond à l'état d'équilibre  $p^* = 0$  (fluide au repos).

2ème cas :  $P = \varepsilon^{*2}$ .

Le système d'équations (12)–(14) s'écrit alors :

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0 \quad (15)$$

$$\varepsilon^{*2} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} = \varepsilon^{*2} \Delta_2 u^* + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad (16a)$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial y^*} = \varepsilon^{*2} \Delta_2 v^* + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad (16b)$$

$$\varepsilon^{*2} \frac{\partial p^*}{\partial z^*} = \varepsilon^{*2} \Delta_2 w^* + \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} + T^* \quad (16c)$$

$$\varepsilon^{*4} Ra w^* + \varepsilon^{*2} \Delta_2 T^* + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} = 0. \quad (17)$$

Une nouvelle discussion s'impose sur le terme  $\varepsilon^{*4} Ra$  :

(a)  $\varepsilon^{*4} Ra \gg 1$ ,  $w^* = 0$  correspond à l'état d'équilibre.

(b)  $\varepsilon^{*4} Ra \ll \varepsilon^{*2}$ ,  $\Delta T = 0$  correspond au régime conductif.

(c)  $\varepsilon^{*4} Ra = O(1)$ , on prend  $\varepsilon^{*4} Ra = Ra_1^*$ ; ensuite on cherche une première approximation en posant  $\varepsilon^{*2} = 0$ . On obtient alors :

$$\frac{\partial u_0^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_0^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w_0^*}{\partial z^*} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 u_0^*}{\partial y^{*2}} = 0 \quad (19a)$$

$$\frac{\partial p_0^*}{\partial y^*} = \frac{\partial^2 v_0^*}{\partial y^{*2}} \quad (19b)$$

$$\frac{\partial^2 w_0^*}{\partial y^{*2}} + T_0^* = 0 \quad (19c)$$

$$Ra_1^* w_0^* + \frac{\partial^2 T_0^*}{\partial y^{*2}} = 0. \quad (20)$$

Les deux dernières équations (19c) et (20) permettent d'avoir :

$$\frac{\partial^4 T_0^*}{\partial y^{*4}} - Ra_1^* T_0^* = 0. \quad (21)$$

Cette équation différentielle a pour solution :

$$T_0^* = \hat{T}_0(x, z) [A e^{\lambda y} + B e^{-\lambda y} + C e^{i\lambda y} + D e^{-i\lambda y}];$$

$$\lambda = (Ra_1^*)^{1/4}.$$

Les conditions aux limites nous permettent de montrer que  $A = B = C = D = 0$ , c'est à dire  $T_0^* = 0$ , ce qui correspond à un état d'équilibre.

(d)  $\varepsilon^{*4} Ra = O(\varepsilon^{*2})$ , on prend  $\varepsilon^{*4} Ra = \varepsilon^{*2} Ra_2^*$ ; ensuite on cherche une première approximation en posant  $\varepsilon^{*2} = 0$ . Une démarche analogue au 2ème cas (c) conduit à un état d'équilibre.

En résumé dans le cas où  $P = \varepsilon^{*2}$ , et avec toutes les possibilités que peut avoir le terme  $\varepsilon^{*4} Ra$ , on est toujours ramené à une solution non significative qui correspond à l'état d'équilibre.

3ème cas.

$P \ll \varepsilon^{*2}$  et  $\varepsilon^{*2} \ll 1$ , le même raisonnement que celui du 2ème cas (c) peut s'appliquer pour montrer que  $u_0^* = v_0^* = w_0^* = T_0^* = 0$ . On retrouve l'état d'équilibre.

4ème cas :

$P = 1$ , le système d'équations s'écrit :

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0 \quad (22)$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial x^*} = \varepsilon^{*2} \Delta_2 u^* + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad (23a)$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial y^*} = \varepsilon^{*4} \Delta_2 v^* + \varepsilon^{*2} \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \quad (23b)$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial z^*} = \varepsilon^{*2} \Delta_2 w^* + \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} + T^* \quad (23c)$$

$$\varepsilon^{*4} Ra w^* + \varepsilon^{*2} \Delta_2 T^* + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} = 0. \quad (24)$$

Dans ce cas aussi une nouvelle discussion s'impose sur le terme  $\varepsilon^{*4} Ra$  :

(a)  $\varepsilon^{*4} Ra \gg 1$ , alors  $w^* = 0$  correspond à un état d'équilibre.

(b)  $\varepsilon^{*4} Ra \ll \varepsilon^{*2}$  ceci implique  $\Delta T = 0$  et par conséquent c'est encore un état d'équilibre.

(c)  $\varepsilon^{*4} Ra = O(1)$ . Si l'on pose  $Ra_3^* = \varepsilon^{*4} Ra$ , une démarche analogue au 2ème cas (c) conduit à une solution non significative correspondant à l'état d'équilibre.

(d)  $\varepsilon^{*4} Ra = O(\varepsilon^{*2})$ , on pose  $\varepsilon^{*2} Ra = Ra^*$  où  $Ra^*$  est constante finie ; dans ce cas, le système d'équations s'écrit :

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \varepsilon^{*2} \Delta_2 u^* \quad (26a)$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial y^*} = \varepsilon^{*2} \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} + \varepsilon^{*4} \Delta_2 v^* \quad (26b)$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial z^*} = \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} + \varepsilon^{*2} \Delta_2 w^* + T^* \quad (26c)$$

$$\varepsilon^{*2} Ra^* w^* + \varepsilon^{*2} \Delta_2 T^* + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} = 0. \quad (27)$$

Ce système sera résolu en détail dans le paragraphe qui suit.

2.2.3. *Développement asymptotique et résolution du système (25)–(27)*. On va chercher une première approximation indépendante du paramètre de perturbation  $\varepsilon^*$ , en négligeant tous les termes d'ordre  $\varepsilon^{*2}$ .

On notera  $u_0^*$ ,  $v_0^*$ ,  $w_0^*$ ,  $T_0^*$ ,  $p_0^*$ , les solutions de cette première approximation au problème posé. On obtient :

$$\frac{\partial u_0^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_0^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w_0^*}{\partial z^*} = 0 \quad (28)$$

$$\frac{\partial p_0^*}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial y^{*2}} \quad (29a)$$

$$\frac{\partial p_0^*}{\partial y^*} = 0 \quad (29b)$$

$$\frac{\partial p_0^*}{\partial z^*} - T_0^* = \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial y^{*2}} \quad (29c)$$

$$\frac{\partial^2 T_0^*}{\partial y^{*2}} = 0. \quad (30)$$

Les équations (29b) et (30) montrent que  $p_0^*$  et  $T_0^*$  sont indépendants de  $y^*$ .

En intégrant (29a) et (29c) et en utilisant les conditions aux limites on obtient :

$$u_0^* = \frac{1}{2} y^* (y^* - 1) \frac{\partial p_0^*}{\partial x^*} \quad (31a)$$

$$w_0^* = \frac{1}{2} y^* (y^* - 1) \left[ \frac{\partial p_0^*}{\partial z^*} - T_0^* \right]; \quad (31b)$$

l'intégration de l'équation de continuité en utilisant la condition  $v_0^* = 0$  en  $y^* = 0$ , on obtient :

$$v_0^* = \frac{1}{2} \left( \frac{y^{*3}}{3} - \frac{y^{*2}}{2} \right) \left[ \Delta_2 p_0^* - \frac{\partial T_0^*}{\partial z^*} \right]; \quad (31c)$$

$v_0^* = 0$ , doit être satisfaite en  $y^* = 1$ , on a donc :

$$\Delta_2 p_0^* - \frac{\partial T_0^*}{\partial z^*} = 0. \quad (32)$$

Le problème reste mal posé pour coupler l'équation de l'énergie et les équations de mouvement. Pour étudier la stabilité du système ainsi que pour chercher des solutions approchées de  $u_0^*$ ,  $v_0^*$ ,  $w_0^*$  et  $T_0^*$ , on pose alors :

$$\begin{aligned} u^* &= u_0^* + A_1(\varepsilon^*) u_1^* + O(A_1) \\ v^* &= v_0^* + B_1(\varepsilon^*) v_1^* + O(B_1) \\ w^* &= w_0^* + C_1(\varepsilon^*) w_1^* + O(C_1) \\ p^* &= p_0^* + D_1(\varepsilon^*) p_1^* + O(D_1) \\ T^* &= T_0^* + E_1(\varepsilon^*) T_1^* + O(E_1). \end{aligned} \quad (33)$$

$u_0^*$ ,  $v_0^*$ ,  $w_0^*$ ,  $p_0^*$  et  $T_0^*$  sont données par la lère approximation et ne sont pas complètement déterminés, à l'exception de  $v_0^*$  qui est nulle.

$A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$  et  $E_1$  sont les deuxièmes termes de chaque séquence asymptotique correspondant au développement asymptotique de chaque variable réduite; elles sont fonction du paramètre de perturbation  $\varepsilon^*$ .

En utilisant ces développements dans le système adimensionnel (25), (26) et (27) et en gardant seulement l'équation d'énergie, il vient :

$$\begin{aligned} \varepsilon^{*2} Ra^* w_0^* + \varepsilon^{*2} \Delta_2 T_0^* + E_1 \frac{\partial^2 T_1^*}{\partial y^{*2}} \\ + O(E_2, \varepsilon^{*2} C_1, \varepsilon^{*2} E_1) = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Pour  $E_1$  trois cas peuvent être envisagés :

1er cas :  $E_1 = o(\varepsilon^{*2})$ , ceci conduit à :

$Ra^* w_0^* + \Delta_2 T_0^* = 0$  ce qui est impossible d'après la lère approximation.

2ème cas :  $\varepsilon^{*2} = o(E_1)$  ce qui mène à :

$$\frac{\partial^2 T_1^*}{\partial y^{*2}} = 0,$$

ce cas est déjà traité par la première approximation.

3ème cas :  $E_1 = \varepsilon^{*2}$ , ce qui correspond à :

$$Ra^* w_0^* + \Delta_2 T_0^* + \frac{\partial^2 T_1^*}{\partial y^{*2}} = 0. \quad (35)$$

En intégrant et en tenant compte de (31b), on obtient :

$$\frac{\partial T_1^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{2} Ra^* \left[ \frac{y^{*3}}{3} - \frac{y^{*2}}{2} \right] \left[ \frac{\partial p_0^*}{\partial z^*} - T_0^* \right] - \Delta_2 T_0^* + A.$$

Or  $\partial T_1^* / \partial y^* = 0$  en  $y^* = 0$  ou  $y^* = 1$ . Ainsi  $A = 0$  et par conséquent :

$$\frac{1}{12} Ra^* \left[ \frac{\partial p_0^*}{\partial z^*} - T_0^* \right] - \Delta_2 T_0^* = 0. \quad (36)$$

Le cas où  $E_1 = \varepsilon^{*2}$  est appelé principe de moindre dégénérescence [16–18].

### 2.3. Etude de la stabilité

D'après le paragraphe précédent, on est arrivé à obtenir les deux relations importantes suivantes :

$$\Delta_2 p_0^* - \frac{\partial T_0^*}{\partial z^*} = 0 \quad (32)$$

$$\frac{1}{12} Ra^* \left[ \frac{\partial p_0^*}{\partial z^*} - T_0^* \right] - \Delta_2 T_0^* = 0. \quad (36)$$

L'expérience montre que les cellules formées ont un comportement périodique dans la direction de l'axe des  $x$ . On peut donc chercher une solution de la forme :

$$p_0^* = (A \sin \omega x^* + B \cos \omega x^*) f(z^*) \quad (37a)$$

$$T_0^* = (C \sin \omega x^* + D \cos \omega x^*) g(z^*). \quad (37b)$$

En injectant ces deux expressions dans (32) et (36), et en tenant compte du fait que  $\sin \omega x^*$  et  $\cos \omega x^*$  constituent une base indépendante, on trouve :

$$A/C = B/D = \lambda \quad (38)$$

$$f'' - \omega^2 f - (1/\lambda) g' = 0 \quad (39)$$

$$g'' - \omega^2 g + \frac{Ra^*}{12} g - \lambda \frac{Ra^*}{12} f' = 0 \quad (40)$$

où

$$Ra^* = \varepsilon^{*2} Gr Pr.$$

Cherchons une solution du système (39), (40) de la forme :

$$\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ g_0 \end{bmatrix} e^{sz^*}$$

pour qu'il y ait une solution non nulle, on écrit que le déterminant de la matrice caractéristique est nul, ce qui conduit à :

$$(s^2 - \omega^2)^2 - \frac{Ra^*}{12} \omega^2 = 0. \quad (41)$$

Soit  $s_1^2 = \omega^2[1 + \sqrt{(Ra^*/12\omega^2)}]$  et  $s_2^2 = \omega^2[1 - \sqrt{(Ra^*/12\omega^2)}]$ .

Deux cas sont possibles :

1er cas :  $1 - \sqrt{(Ra^*/12\omega^2)} \geq 0$ , les quatre racines sont réelles :  $\pm s_1, \pm s_2$

$$s_1 = \omega[1 + \sqrt{(Ra/12\omega^2)}]^{1/2}$$

$$\text{et } s_2 = \omega[1 - \sqrt{(Ra/12\omega^2)}]^{1/2}.$$

La solution est du type :

$$f(z^*) = A_1 e^{s_1 z^*} + A'_1 e^{-s_1 z^*} + A_2 e^{s_2 z^*} + A'_2 e^{-s_2 z^*} \quad (42a)$$

$$g(z^*) = \lambda \frac{(s_1^2 - \omega^2)}{s_1} [A_1 e^{s_1 z^*} - A'_1 e^{-s_1 z^*}]$$

$$+ \lambda \frac{(s_2^2 - \omega^2)}{s_2} [A_2 e^{s_2 z^*} - A'_2 e^{-s_2 z^*}] \quad (42b)$$

compte tenu de (37a, b), les équations (31a) et (31b) s'écrivent :

$$u_0^* = \omega(A \cos \omega x^* - B \sin \omega x^*) f(z^*) \quad (43a)$$

$$w_0^* = (A \sin \omega x^* + B \cos \omega x^*) \left[ f'(z^*) - \frac{1}{\lambda} g(z^*) \right]. \quad (43b)$$

Si on utilise les conditions type interface libre  $w_0^* = 0$  et contraintes tangentielles  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  nulles, ceci revient à écrire :  $w_0^* = 0$  et  $T_0^* = 0$ . Ces conditions ont été utilisées pour le cas d'une cellule de Hele-Shaw. Les conditions aux limites sont alors les suivantes :

$$f'(z^*) - \frac{1}{\lambda} g(z^*) = 0 \quad \text{en } z^* = 0 \quad \text{et } z^* = 1 \quad (44a)$$

$$g(z^*) = 0 \quad \text{en } z^* = 0 \quad \text{et } z^* = 1. \quad (44b)$$

Avec ces conditions le système (42a), (42b) peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} s_1 & -s_1 & s_2 & -s_2 \\ s_1 e^{s_1} & -s_1 e^{-s_1} & s_2 e^{s_2} & -s_2 e^{-s_2} \\ \alpha_1 & -\alpha_1 & \alpha_2 & -\alpha_2 \\ \alpha_1 e^{s_1} & -\alpha_1 e^{-s_1} & \alpha_2 e^{s_2} & -\alpha_2 e^{-s_2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_1 \\ A'_1 \\ A_2 \\ A'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

où  $\alpha_1 = (s_1^2 - \omega^2)/s_1, \alpha_2 = (s_2^2 - \omega^2)/s_2$ .

Pour que  $f(z^*)$  soit différent de zéro, il suffit que le déterminant de la matrice soit nul ce qui conduit à :

$$D_0 = (\alpha_2 s_1 - \alpha_1 s_2)^2 \sinh s_1 \sinh s_2 = 0$$

ceci n'est pas possible.

En réalité il faut plutôt utiliser les conditions d'adhérence sur les parois  $u_0^* = w_0^* = 0$  :

$$f'(z^*) - \frac{1}{\lambda} g(z^*) = 0 \quad \text{en } z^* = 0 \quad \text{et } z^* = 1 \quad (46a)$$

$$f(z^*) = 0 \quad \text{en } z^* = 0 \quad \text{et } z^* = 1. \quad (46b)$$

La même démarche que précédemment conduit à :

$$D_1 = (\alpha_3 + \alpha_4)^2 \cosh(s_1 - s_2) - (\alpha_3 - \alpha_4)^2 \cosh(s_1 + s_2) - \alpha_3 \alpha_4 = 0$$

où  $\alpha_3 = \frac{\omega^2}{s_1}$  et  $\alpha_4 = \frac{\omega^2}{s_2}$ .

La résolution numérique de  $D_1 = 0$  montre qu'il n'y a pas de solution, c'est à dire  $D_1 \neq 0$ , et par conséquent le système est stable dans la zone  $Ra^* \leq 12\omega^2$ .

2ème cas :  $1 - \sqrt{(Ra^*/12\omega^2)} < 0$ ; on a deux racines réelles et deux racines imaginaires

$$\pm s_1 = \pm \omega[1 + \sqrt{(Ra/12\omega^2)}]^{1/2} \quad \text{et}$$

$$\pm s_2 = \pm i\omega[-1 + \sqrt{(Ra/12\omega^2)}]^{1/2} = \pm iq.$$

La solution est du type :

$$f(z^*) = A_1 e^{s_1 z^*} + A'_1 e^{-s_1 z^*} + A_2 \sin qz^* + A'_2 \cos qz^*$$

$$g(z^*) = \lambda \frac{(s_1^2 - \omega^2)}{s_1} [A_1 e^{s_1 z^*} - A'_1 e^{-s_1 z^*}]$$

$$+ \lambda \frac{(q^2 + \omega^2)}{q} [A_2 \cos qz^* - A'_2 \sin qz^*].$$

En utilisant les conditions ( $w_0^* = T_0^* = 0$ ), le déterminant du système s'écrit :

$$D_2 = \left[ \frac{(s_1^2 - \omega^2)}{s_1} q - \frac{(q^2 + \omega^2)}{q} s_1 \right] \sinh s_1 \sin q = 0.$$

Ceci n'est possible que si  $\sin q = 0$ , soit  $q = n\pi$  ( $n$  entier), ce qui conduit à la relation :

$$Ra^* = 12\omega^2 \left[ 1 + \frac{n^2 \pi^2}{\omega^2} \right]^2. \quad (47)$$

Qui définit les courbes de stabilité marginale. La première instabilité apparait pour  $n = 1$ . La courbe correspondante est indiquée sur la Fig. 2 (courbe 2), d'où l'on peut tirer le nombre de Rayleigh critique  $Ra_c^* = 48\pi^2$ , et le nombre d'onde correspondant  $\pi$ . On retrouve ainsi le résultat classique dans la littérature.

Si maintenant on utilise les conditions aux limites  $u_0^* = w_0^* = 0$ , le déterminant est :

$$D_3 = 2[\alpha_4^2 - \alpha_3^2] \sin q \sinh s_1 + 4\alpha_3 \alpha_4 \cos q \cosh s_1 - 4\alpha_3 \alpha_4 = 0 \quad (48)$$

où  $\alpha_3 = \omega^2/s_1$  et  $\alpha_4 = -\omega^2/q$ .

La relation (48) détermine les courbes de stabilité marginale. Sa résolution numérique permet de tracer la première courbe de stabilité (Fig. 2, courbe 3) d'où l'on peut tirer le nombre de Rayleigh critique  $Ra_c^*$  et le nombre d'onde  $\omega_c$  correspondant :

$$Ra_c^* = 825.6$$

$$\omega_c = 4.754. \quad (49)$$

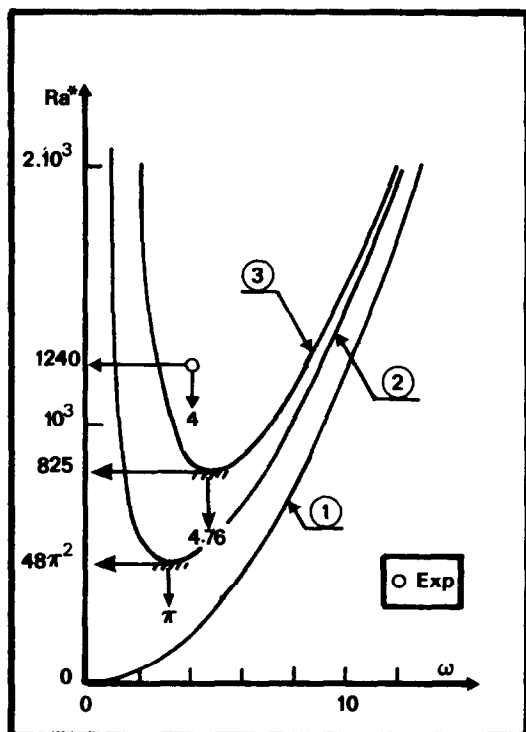


FIG. 2. Courbes de stabilité marginale : courbe 2, relation (47) ; courbe 3, relation (48). La courbe 1 correspond à  $Ra^* = 12\omega^2$ .

Valeurs qui sont proches des observations expérimentales en général, et de nos essais décrits dans le paragraphe qui suit.

### 3. CONFRONTATION EXPERIMENTALE

Pour effectuer des expériences sur ce type particulier d'instabilités de Rayleigh-Bénard, nous avons utilisé une cellule dite de Hele-Shaw (Fig. 3). Les parois latérales transparentes de la cellule sont en plexiglass. Les deux tubes en cuivre inférieur et supérieur permettent respectivement la circulation d'eau chaude et froide dont la température est régulée par deux thermostats de débits respectifs  $qv_1 = 63 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$  et  $qv_2 = 30 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ . Les températures respectives des deux tubes de cuivre  $T_1$  et  $T_2$  sont très proches de celle de l'eau qui circule dans les tubes  $T'_1$  et  $T'_2$ . Un calcul simple sur les résistances thermiques permet de montrer que l'écart entre la température de la paroi externe du tube et celle de l'eau est de  $0.1^\circ\text{C}$ . Ces températures sont mesurées par quatre thermocouples 'Chromel-Alumel' type K, de diamètre 1 mm, placés à l'entrée et à la sortie de chaque tube. Ces thermocouples indiqués par 2 sur la Fig. 3 sont reliés à une centrale de mesure (Schlumberger) de précision  $\pm 0.1^\circ$ .

Le fluide 'test' est enfermé dans la cavité rectangulaire de longueur  $L = 20 \text{ cm}$ , de hauteur  $l = 1 \text{ cm}$  et d'épaisseur  $\varepsilon = 1 \text{ mm}$  ( $\varepsilon^* \approx 0.1$ ). Ce fluide 'test' est de l'eau contenant 3% de kalliroscope pour permettre

de bien visualiser les cellules lors du mouvement convectif comme l'indique les photographies de la Fig. 4. Les propriétés physiques de ce fluide en fonction de la température ont été soigneusement contrôlées :  $\nu$  par des tubes capillaires,  $\beta$  par des densimètres de précision et  $\alpha$  par la méthode flash [19, 20]. Ces propriétés sont très voisines de celles de l'eau :

$$\nu(\text{m}^2 \text{ s}^{-1}) = 1.679 \exp(-2.559 \times 10^{-2} t^\circ)$$

$$\beta(\text{K}^{-1}) = 1.82 \times 10^{-4} + 1.025 \times 10^{-4}(t^\circ - 20)$$

$$\alpha(\text{m}^2 \text{ s}^{-1}) = 1.31 \times 10^{-7} \exp(4.25 \times 10^{-3} t^\circ)$$

$t^\circ$  en degré Celsius.

Pour avoir l'écart de température minimal qui correspond au déclenchement du mouvement convectif, nous avons procédé de la façon suivante : on applique au départ un gradient de température qui permet de rester en régime purement conductif dans le fluide. Ensuite on augmente l'écart par élévation de la température de l'eau chaude, l'eau froide est maintenue pendant toute la durée de l'expérience à  $25^\circ\text{C}$ . Une fois que les premières cellules commencent à se former, on relève l'écart de température. La durée d'un essai est d'environ quatre heures selon cette procédure. Cependant si l'on applique dès le départ un écart de température légèrement supérieur à la valeur critique ( $\Delta T_c$ ), les cellules apparaissent au bout d'une dizaine de minutes.

Plusieurs essais ont montré que les cellules apparaissent pour un écart de température  $T_1 - T_2 = 5.8^\circ\text{C}$ . Le nombre de cellules visualisées varie selon l'expérience entre 24 et 26. Le nombre de Rayleigh critique de la cellule  $Ra_c^*$  est de l'ordre de 1240. Pour 25 cellules le nombre d'ondes expérimental est de 4 environ. Ces deux dernières valeurs sont plus proches de nos prévisions théoriques ( $Ra_c^* = 825.6$  ;  $\omega_c = 4.754$ ) que celles couramment admises dans la littérature ( $48\pi^2$ ,  $\pi$ ). On peut noter cependant que l'écart entre la valeur théorique (825) et la valeur mesurée (1240) reste important (50%). A notre avis, il ne peut pas seulement être imputé aux incertitudes de mesures ( $\pm 4\%$  sur  $\Delta T$ ,  $\pm 5\%$  sur  $\varepsilon$ ), mais aussi aux fuites thermiques par les parois latérales qu'il convient d'estimer. C'est pourquoi, nous avons entrepris une observation qualitative de l'écoulement à l'aide d'un binoculaire (grossissement  $\sim$  cinq fois) au voisinage immédiat des tubes. Cette observation a permis de montrer l'existence d'une zone de fluide quasi stagnante (Fig. 3, détail B) d'épaisseur 0.8–1 mm (de l'ordre de  $\varepsilon$ ). Cette zone apparaît légèrement obscure contrairement à la zone de convection où les particules de kalliroscope deviennent réfléchissantes. Dès lors, en première approximation, on peut considérer que la température est linéaire dans ces zones. Zones où nous avons installé deux thermocouples Cr-Al  $\varnothing 1 \text{ mm}$ . Ces thermocouples repérés par 2' sur la Fig. 5 permettent de mesurer les températures moyennes  $T_{m1}$  et  $T_{m2}$ . A

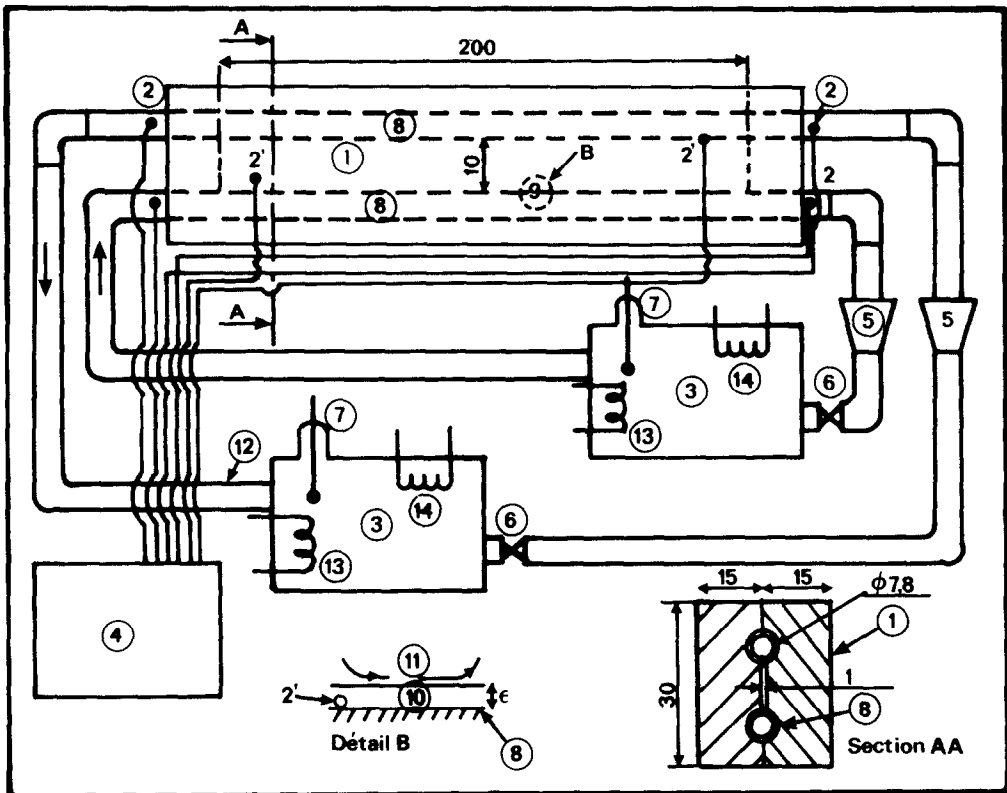


FIG. 3. Montage expérimental (côtes en mm). 1, Cellules en 'plexiglass'; 2, thermocouples; 2', thermocouples dans le fluide 'test'; 3, thermostat; 4, centrale de mesure de température; 5, rotamètre; 6, vannes; 7, thermomètre à contact 'vertex'; 8, tube de cuivre; 9, emplacement du binoculaire; 10, zone de fluide quasi-stagnante (obscur); 11, zone réfléchissante; 12, tube de raccordement; 13, liquide de refroidissement; 14, résistante chauffante.

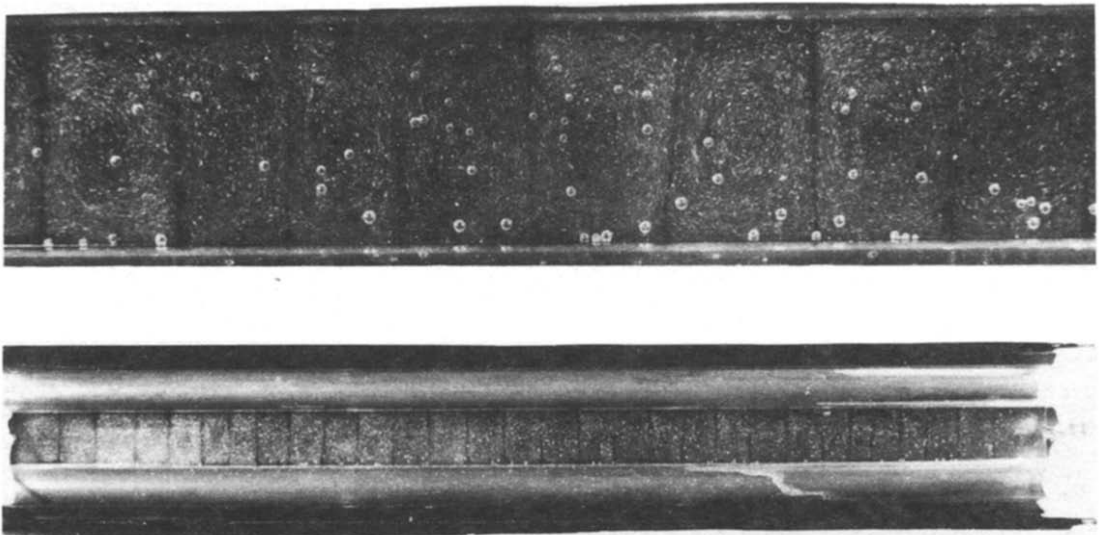


FIG. 4. Visualisation des cellules par kalliroscope.



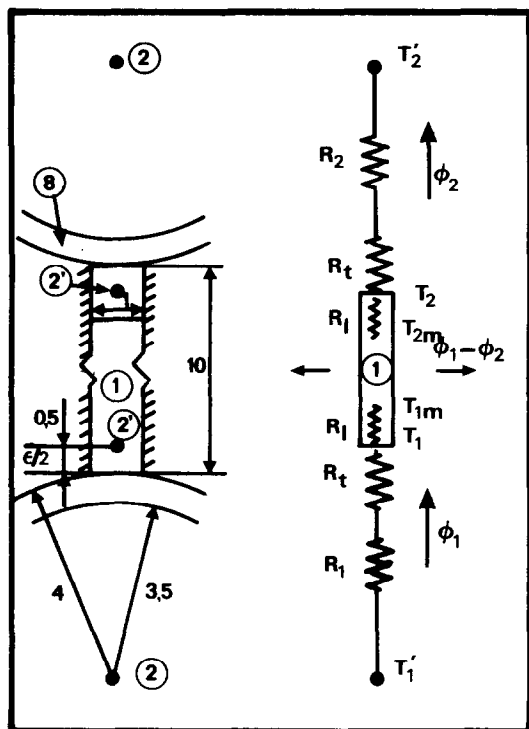


FIG. 5. Section transversale de la cellule expérimentale de Hele-Shaw et schéma du transfert thermique correspondant (cotes en mm). 1, Cellule; 2-2': thermocouples; 8, tubes de cuivre  $\varnothing$  8 mm.

l'apparition des cellules les températures mesurées sont :

$$T'_1 = 31^\circ\text{C}, \quad T_{m1} = 30^\circ\text{C},$$

$$T'_2 = 25^\circ\text{C}, \quad T_{m2} = 25.4^\circ\text{C}.$$

Le transfert de flux de chaleur de l'eau chaude vers le fluide 'test' ( $\Phi_1$ ) et du fluide 'test' vers l'eau froide ( $\Phi_2$ ) se fait à travers les résistances thermiques selon le schéma de la Fig. 5 :

$$R_1 = 1/h_1, \quad R_2 = 1/h_2, \quad R_t = e/\lambda_{\text{cuivre}}, \quad R_l = \varepsilon/2\lambda_{\text{eau}}$$

où  $e$  est l'épaisseur du tube de cuivre,  $h_1$  et  $h_2$  sont les coefficients de transfert de chaleur calculés à partir de corrélations classiques [21] :

$$R_1 = 1.107, \quad R_2 = 2.53, \quad R_l = 0.013,$$

$$R_t = 8.07 \times 10^{-4} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}.$$

De ces valeurs on peut tirer :

$$T_1 = 30.9, \quad T_2 = 25.1^\circ\text{C}, \quad T_1 - T_2 = 5.8^\circ\text{C},$$

$$\Phi_1 = 1089 \text{ W m}^{-2}, \quad \Phi_2 = 377 \text{ W m}^{-2},$$

$$\text{soit } \Phi_2/\Phi_1 = 0.35.$$

On voit donc que les fuites thermiques par les parois latérales représentent environ 65% du flux entrant  $\Phi_1$ . Il n'est donc pas étonnant que le nombre de Rayleigh critique trouvé expérimentalement, dépasse largement la valeur théorique. Par ailleurs, on peut remarquer

que le flux de chaleur  $\Phi_1$  est environ trois fois le flux par conduction ( $\lambda_1 \Delta T/l$ ) pour le même écart de température, ce qui montre ainsi l'augmentation du transfert de chaleur dès l'apparition des instabilités.

#### 4. CONCLUSION

Les études qui ont été menées ces dernières années sur le déclenchement du mouvement de convection de Rayleigh-Bénard dans une cellule de Hele-Shaw d'extension infinie, ont montré, en utilisant la théorie linéaire que le nombre de Rayleigh critique est  $Ra_c \cong 48\pi^2/\varepsilon^{*2}$ ,  $\varepsilon^*$  est le rapport d'aspect transversal de la cellule. Nous montrons que ce résultat n'est en fait valable que pour une couche de fluide à surfaces horizontales libres. Notre démarche consiste à considérer la couche à surfaces horizontales rigides. Le point de départ est une application rigoureuse de l'analyse adimensionnelle, et une discussion sur l'ordre de grandeur des termes adimensionnels, qui nous ont permis de mettre en évidence des échelles caractéristiques appropriées. Nous avons ensuite appliqué la méthode des développements asymptotiques, en considérant le rapport d'aspect  $\varepsilon^* = \varepsilon/l$  comme un paramètre de perturbation. Finalement, nous obtenons deux équations différentielles linéaires liant la pression et la température. Ces équations ont été résolues par des méthodes classiques, toujours pour une couche de fluide à surfaces horizontales rigides. Le nombre de Rayleigh critique est alors  $Ra_c \cong 825.6/\varepsilon^{*2}$ .

Parallèlement à cette étude théorique, nous avons mené une campagne expérimentale sur le nombre de Rayleigh critique. Pour visualiser les cellules, le fluide 'test' contient 3% de kallioscope produit utilisé pour la première fois dans ce genre de situation. Les résultats montrent que le nombre de Rayleigh critique expérimental est supérieur à nos prévisions théoriques. Cette différence a été expliquée par l'estimation des fuites thermiques à travers les parois latérales.

#### REFERENCES

1. H. Frick and R. M. Clever, Einfluss der seitenwände auf das einsetzen der konvektion in einer horizontalen flüssigkeitsschicht, *Z. Angew. Math. Phys.* **31**, 502 (1980).
2. J. K. Platten and J. C. Legros, *Convection in Liquids*, p. 315. Springer, Heidelberg (1984).
3. S. H. Davis, Convection in box: linear theory, *J. Fluid Mech.* **30**, 465 (1967).
4. K. Stork and U. Müller, convection in boxes: experiments, *J. Fluid Mech.* **54**, 599 (1972).
5. R. P. Davies-Jones, Thermal convection in an infinite channel with no slip side walls, *J. Fluid Mech.* **44**, 695 (1970).
6. J. M. Luijkx and J. K. Platten, Precise measurements of the wave length at the onset of Rayleigh-Bénard convection in a long rectangular duct, *Int. J. Heat Mass Transfer* **25**, 1252 (1982).
7. I. Catton, Convection in a closed rectangular region: the onset of motion, *Trans. ASME, J. Heat Transfer* **C92**, 186 (1970).
8. M. S. Chana and P. G. Daniels, Onset of Rayleigh-

- Benard convection in a rigid channel, *J. Fluid Mech.* **199**, 257 (1989).
9. J. Bear, *Dynamics in Porous Media*. Elsevier, Amsterdam (1972).
  10. J. N. Koster and U. Müller, Free convection in vertical gaps, *J. Fluid Mech.* **125**, 125 (1982).
  11. J. N. Koster, Heat transfer in vertical gaps, *Int. J. Heat Mass Transfer* **25**, 426 (1982).
  12. B. K. Hartline and C. R. B. Lister, Thermal convection in a Hele-Shaw cell, *J. Fluid Mech.* **27**, 29 (1977).
  13. J. W. Elder, Steady free convection in a porous medium heated from below, *J. Fluid Mech.* **27**, 29 (1967).
  14. A. Pellew and R. V. Southwell, On maintained convective motion in a fluid heated from below, *Proc. R. Soc. A* **312** (1940).
  15. E. R. Lapwood, Convection in a porous medium, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **44** (1948).
  16. R. Kh. Zeytounian, *Les Modèles Asymptotiques en Mécanique des Fluides I*, Lecture Notes in Physics, 245. Springer, Berlin (1986).
  17. R. Kh. Zeytounian, *Les Modèles Asymptotiques en Mécanique des Fluides II*, Lecture Notes in Physics, 276. Springer, Berlin (1987).
  18. C. Francois, *Méthodes de Perturbation en Mécanique*. Cours E.N.S.T.A., Paris (1981).
  19. A. Degiovanni, Diffusivité et méthode flash, *Revue Gén. Therm.* No. 185, 417 (1977).
  20. A. Degiovanni, Une nouvelle technique d'identification de la diffusivité thermique par la méthode flash, *Revue Phys. Appl.* **21**, 229 (1986).
  21. V. Gnielinski, Forced convection in ducts. In *Heat Exchanger Design Handbook*. Vol. 2, p. 2511. Hemisphere, New York (1983).

#### RAYLEIGH-BENARD INSTABILITIES IN HELE-SHAW CELLS

**Abstract**—In this paper, we perform a theoretical and experimental study on the onset of convection of a fluid in a Hele-Shaw cell. We find that the critical Rayleigh number previously found by others is only valid for a fluid layer with free horizontal surfaces, which is not the case for the Hele-Shaw cell. In the case of rigid horizontal surfaces, our approach leads to a critical Rayleigh number equal to 825.6. This is in closer agreement with the experimental results than the value previously found. We have also developed an elegant method of visualizing the cells for these types of situations.

#### RAYLEIGH-BENARD-INSTABILITÄTEN IN HELE-SHAW-ZELLEN

**Zusammenfassung**—In der vorliegenden Arbeit wird das Einsetzen der Konvektion in einer Hele-Shaw-Zelle theoretisch und experimentell untersucht. Es zeigt sich, daß die früher von anderen Autoren gefundene kritische Rayleigh-Zahl nur für eine Fluidschicht mit freien horizontalen Oberflächen gilt, was bei einer Hele-Shaw-Zelle nicht der Fall ist. Im Fall fester horizontaler Oberflächen ergibt die vorliegende Untersuchung eine kritische Rayleigh-Zahl von 825,6. Dieser Wert stimmt besser mit den experimentellen Ergebnissen überein als der früher gefundene Wert. Eine elegante Methode zur Sichtbarmachung der Zellen unter diesen Bedingungen wurde entwickelt, wodurch der kritische Wert der Rayleigh-Zahl experimentell bestimmt werden kann.

#### НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РЭЛЕЯ-БЕНАРА В ЯЧЕЙКАХ ХИЛ-ШОУ

**Аннотация**—Теоретически и экспериментально исследуется возникновение конвекции жидкости в ячейке Хил-Шоу. Найдено, что критическое число Рэлея, полученное ранее другими авторами, справедливо только для слоя жидкости со свободными горизонтальными поверхностями; в случае же ячейки Хил-Шоу это условие отсутствует. Для твердых горизонтальных поверхностей получено критическое число Рэлея, равное 825,6, что лучше согласуется с экспериментальными данными, чем ранее найденное значение. Разработан также метод визуализации ячеек в рассматриваемых условиях.